

Bolcmanova jednačina i H -teorema:

od kinetičke teorije gasova do neravnotežne termodinamike

Srboljub Simić

Departman za mehaniku, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Seminar iz fizike/astrofizike
Departman za fiziku, 19. februar 2016.

Ciljevi

Kinetička teorija gasova (KTG)

- Proučava dinamiku razredjenih gasova
- Stanje je opisano funkcijom raspodele brzina
- Interakcija čestica – elastični sudari \Rightarrow **reverzibilnost**
- Bolcmanova jednačina – H -teorema \Rightarrow **ireverzibilnost**

Neravnotežna termodinamika (TIP)

- Makroskopska analiza – jednačine bilansa mase, količine kretanja i energije
- Konstitutivne relacije – Njutnovski fluidi, Furijeov zakon
- Entropijska nejednakost
- Pretpostavka o lokalnoj ravnoteži – Gibsova relacija

Ciljevi

Kinetička teorija gasova (KTG)

- Proučava dinamiku razredjenih gasova
- Stanje je opisano funkcijom raspodele brzina
- Interakcija čestica – elastični sudari \Rightarrow reverzibilnost
- Bolcmanova jednačina – H -teorema \Rightarrow ireverzibilnost

Neravnotežna termodinamika (TIP)

- Makroskopska analiza – jednačine bilansa mase, količine kretanja i energije
- Konstitutivne relacije – Njutnovski fluidi, Furijeov zakon
- Entropijska nejednakost
- Pretpostavka o lokalnoj ravnoteži – Gibsova relacija

Cilj (za danas)

- Uspostavljanje veze izmedju kinetičke teorije gasova i neravnotežne termodinamike
- KTG: Bolcmanova jednačina, ravnotežna, lokalno ravnotežna i neravnotežna raspodela brzina
- TIP: lokalna ravnoteža, Gibsova relacija, entropijska nejednakost
- Bonus: hidrodinamička aproksimacija, konstitutivne relacije, jednačine momenata

Sadržaj

- 1 Bolcmanova jednačina
 - Funkcija raspodele
 - Bolcmanova jednačina
 - H-teorema

- 2 Neravnotežni procesi
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

Sadržaj

- 1 Bolcmanova jednačina
 - Funkcija raspodele
 - Bolcmanova jednačina
 - H-teorema

- 2 Neravnotežni procesi
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

Funkcija raspodele

Stanje čestice atoma

Stanje atoma (molekula) u trenutku t određeno je njegovim položajem \mathbf{x} i njegovom brzinom $\boldsymbol{\xi}$, $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.

Interakcija čestica

- Gas je razredjen – podrazumevaju se samo binarne interakcije (sudari) između čestica.
- Vreme trajanja interakcije je mnogo kraće od srednjeg vremena slobodnog leta čestice.
- Sudari su *elastični*.
- Promena stanja čestica je određena zakonima održanja količine kretanja i energije.

Funkcija raspodele

Koliziona transformacija

(ξ, ξ_*) brzine čestica *posle* sudara

(ξ', ξ'_*) brzine čestica *pre* sudara

Zakoni održanja

$$\begin{aligned}\xi' + \xi'_* &= \xi + \xi_* \\ |\xi'|^2 + |\xi'_*|^2 &= |\xi|^2 + |\xi_*|^2\end{aligned}$$

Transformacija brzina (ω -notacija, $\omega \in \mathbb{S}^2$)

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi - \omega(\omega \cdot (\xi - \xi_*)) \\ \xi'_* &= \xi_* + \omega(\omega \cdot (\xi - \xi_*))\end{aligned}$$

Funkcija raspodele

Funkcija raspodele brzina

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$ – broj čestica u elementarnoj zapremini $d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$ faznog prostora

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \quad \text{– ukupan broj čestica}$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \quad \text{– broj čestica u jedinici zapremine (brojna gustina)}$$

Funkcija raspodele

Ravnotežna (Maksvel-Bolcmanova) raspodela

$$f_M = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}|^2}{2(k_B/m)T} \right\}$$

Makroskopske veličine

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} m f_M d\boldsymbol{\xi}$$

$$\rho \mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} m \boldsymbol{\xi} f_M d\boldsymbol{\xi}$$

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m |\boldsymbol{\xi}|^2 f_M d\boldsymbol{\xi}$$

Funkcija raspodele

Relativna brzina

$$C_i = \xi_i - v_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Pritisak i temperatura (jednoatomski gas)

$$p = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} m |\mathbf{C}|^2 f_M(\mathbf{v} + \mathbf{C}) d\mathbf{C} = \rho \frac{k_B}{m} T$$

$$\rho \varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m |\mathbf{C}|^2 f_M(\mathbf{v} + \mathbf{C}) d\mathbf{C} = \frac{3}{2} \rho \frac{k_B}{m} T$$

$$3p = 2\rho\varepsilon \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2m}{3k_B} \varepsilon = \frac{m}{3k_B \rho} \int_{\mathbb{R}^3} m |\mathbf{C}|^2 f_M(\mathbf{v} + \mathbf{C}) d\mathbf{C}$$

Sadržaj

- 1 **Bolcmanova jednačina**
 - Funkcija raspodele
 - **Bolcmanova jednačina**
 - H-teorema

- 2 **Neravnotežni procesi**
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

Bolcmanova jednačina

Kako se ponaša funkcija raspodele ako zavisi i od t i \mathbf{x} ?

Bolcmanova jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q(f, f)$$

Kolizioni integral

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_* - f f_*) \mathcal{B}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\xi}_*$$

Kolizioni presek $\mathcal{B}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\sigma})$ – opisuje model interakcije između čestica (krute kuglice, odbojna potencijalna sila,...)

Bolcmanova jednačina

Kolizione invarijante

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\boldsymbol{\xi}) Q(f, f) d\boldsymbol{\xi} = 0$$

$$\psi(\boldsymbol{\xi}') + \psi(\boldsymbol{\xi}'_*) = \psi(\boldsymbol{\xi}) + \psi(\boldsymbol{\xi}_*)$$

Elementarne kolizione invarijante

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_i = \xi_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad \psi_4 = |\boldsymbol{\xi}|^2$$

Makroskopske veličine

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho |\mathbf{v}|^2 + 2\rho\varepsilon \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} m \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_i \\ |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

Bolcmanova jednačina

Unutrašnja energija, tenzor pritiska i toplotni protok

unutrašnja energija $\rho\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m|\mathbf{C}|^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{C})d\mathbf{C}$

tenzor pritiska $p_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} mC_i C_j f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{C})d\mathbf{C} = -t_{ij}$

toplotni protok $q_i = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m|\mathbf{C}|^2 C_i f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{C})d\mathbf{C}$

Bolcmanova jednačina

Makroskopske jednačine

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\alpha} f d\xi + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \xi_i \psi_{\alpha} f d\xi = 0 \quad \alpha = 0, \dots, 4$$

Masa $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$

Količina kretanja $\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j v_i + p_{ji}) = 0$

Energija $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon \right) v_i + \sum_{j=1}^3 p_{ji} v_j + q_i \right\} = 0$

Sadržaj

- 1 Bolcmanova jednačina
 - Funkcija raspodele
 - Bolcmanova jednačina
 - H-teorema

- 2 Neravnotežni procesi
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

H-teorema

Entropijska nejednakost

gustina entropije $h = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} f \log f d\xi$

protok entropije $h_i = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} \xi_i f \log f d\xi$

produkcija entropije $\Sigma = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} \log f Q(f, f) d\xi \geq 0$

Teorema (Entropijska nejednakost)

Za ma koje rešenje f Bolcmanove jednačine važi:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \Sigma \geq 0.$$

H-teorema

Ireverzibilnost

- Sudari čestica su (mikro)reverzibilni.
- Produkcija entropije je nenegativna \Rightarrow ireverzibilnost.
- Kako **reverzibilnost** na mikro skali implicira **ireverzibilnost** na makro skali?

Hipoteza o molekularnom haosu

Brzine čestica **pre sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji. Zbog velikog broja sudara pretpostavlja se da brzine čestica **ni posle sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji.

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_* - f f_*) B(\xi - \xi_*, \sigma) d\sigma d\xi_*$$

H-teorema

Ireverzibilnost

- Sudari čestica su (mikro)reverzibilni.
- Produkcija entropije je nenegativna \Rightarrow ireverzibilnost.
- Kako **reverzibilnost** na mikro skali implicira **ireverzibilnost** na makro skali?

Hipoteza o molekularnom haosu

Brzine čestica **pre sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji. Zbog velikog broja sudara pretpostavlja se da brzine čestica **ni posle sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji.

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_* - f f_*) B(\xi - \xi_*, \sigma) d\sigma d\xi_*$$

H-teorema

Ireverzibilnost

- Sudari čestica su (mikro)reverzibilni.
- Produkcija entropije je nenegativna \Rightarrow ireverzibilnost.
- Kako **reverzibilnost** na mikro skali implicira **ireverzibilnost** na makro skali?

Hipoteza o molekularnom haosu

Brzine čestica **pre sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji. Zbog velikog broja sudara pretpostavlja se da brzine čestica **ni posle sudara** nisu ni u kakvoj korelaciji.

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_* - f f_*) \mathcal{B}(\xi - \xi_*, \sigma) d\sigma d\xi_*$$

H-teorema

Funkcional produkcije entropije

$$D(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \log f Q(f, f) d\xi \leq 0$$

H-teorema

Neka je kolizijski presek B pozitivan skoro svuda i neka je $f \geq 0$ takva funkcija da su $Q(f, f)$ i $D(f)$ dobro definisani. Tada važi:

- Produkcija entropije je nepozitivna, $D(f) \leq 0$.
- Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:
 - 1 Za ma koje $\xi \in \mathbb{R}^3$, $Q(f, f) = 0$;
 - 2 Produkcija entropije je jednaka nuli, $D(f) = 0$;
 - 3 Postoje $\rho > 0$, $T > 0$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takve da je:

$$f = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\xi - \mathbf{v}|^2}{2(k_B/m)T} \right\}.$$

H-teorema

Funkcional produkcije entropije

$$D(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \log f Q(f, f) d\xi \leq 0$$

H-teorema

Neka je kolizioni presek B pozitivan skoro svuda i neka je $f \geq 0$ takva funkcija da su $Q(f, f)$ i $D(f)$ dobro definisani. Tada važi:

- Produkcija entropije je nepozitivna, $D(f) \leq 0$.
- Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:
 - 1 Za ma koje $\xi \in \mathbb{R}^3$, $Q(f, f) = 0$;
 - 2 Produkcija entropije je jednaka nuli, $D(f) = 0$;
 - 3 Postoje $\rho > 0$, $T > 0$ and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ takve da je:

$$f = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\xi - \mathbf{v}|^2}{2(k_B/m)T} \right\}.$$

H-teorema

Lokalno ravnotežna raspodela

$$f_M^{loc}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T(t, \mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2}{2(k_B/m)T(t, \mathbf{x})} \right\}$$

Svojstva f_{Mloc}

- $Q(f_M^{loc}, f_M^{loc}) = 0$
- $D(f_M^{loc}) = 0$
- f_M^{loc} **ne zadovoljava** Bolcmanovu jednačinu!

H-teorema

Lokalno ravnotežna raspodela

$$f_M^{loc}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T(t, \mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2}{2(k_B/m)T(t, \mathbf{x})} \right\}$$

Svojstva f_{Mloc}

- $Q(f_M^{loc}, f_M^{loc}) = 0$
- $D(f_M^{loc}) = 0$
- f_M^{loc} **ne zadovoljava** Bolcmanovu jednačinu!

H-teorema

Tenzor pritiska i toplotni protok u lokalnoj ravnoteži

$$p_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} m C_i C_j f_M^{loc} d\mathbf{C} = p \delta_{ij} \quad q_i = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m |\mathbf{C}|^2 C_i f_M^{loc} d\mathbf{C} = 0$$

Ojlerove jednačine gasne dinamike

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j v_i + p \delta_{ji}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 v_i + \rho \varepsilon v_i + p v_i \right) = 0$$

H-teorema

Entropija u lokalnoj ravnoteži

$$\begin{aligned}h &= \rho s_E = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} f_M^{loc} \log f_M^{loc} d\xi \\ &= -k \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{m} \left[\log \left(\frac{\rho(t, \mathbf{x})}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T(t, \mathbf{x})} \right)^{3/2} \right) - \frac{3}{2} \right]\end{aligned}$$

Gibsova relacija

$$ds_E = \frac{1}{T} \left\{ d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right\}$$

Pitanje konvergencije

$$f(t, \mathbf{x}, \xi) \rightarrow f_M \quad \text{ili} \quad f(t, \mathbf{x}, \xi) \rightarrow f_M^{loc}?$$

Sadržaj

- 1 **Bolcmanova jednačina**
 - Funkcija raspodele
 - Bolcmanova jednačina
 - H-teorema

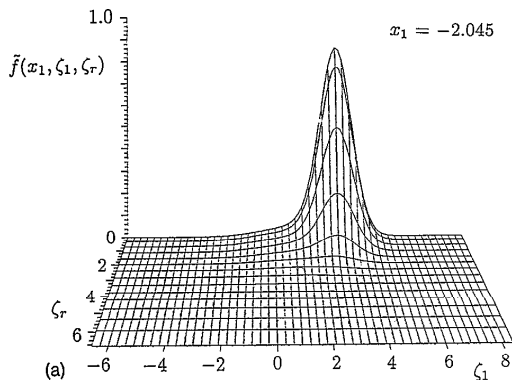
- 2 **Neravnotežni procesi**
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

Makroskopske veličine van ravnoteže

Struktura udarnog talasa

T. Ohwada, Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A*, **5** (1), 217–234 (1993)

$M = 3.0$ – funkcija raspodele u različitim tačkama

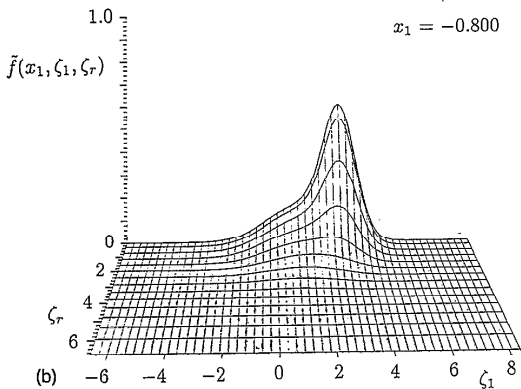


Makroskopske veličine van ravnoteže

Struktura udarnog talasa

T. Ohwada, Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A*, **5** (1), 217–234 (1993)

$M = 3.0$ – funkcija raspodele u različitim tačkama

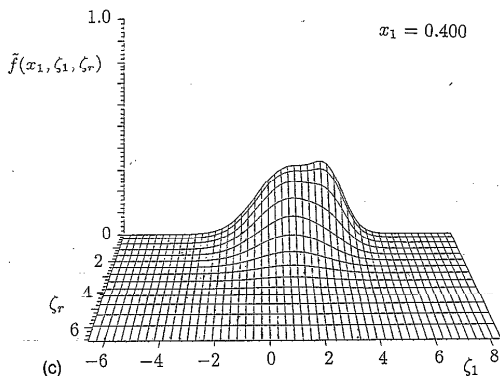


Makroskopske veličine van ravnoteže

Struktura udarnog talasa

T. Ohwada, Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A*, **5** (1), 217–234 (1993)

$M = 3.0$ – funkcija raspodele u različitim tačkama

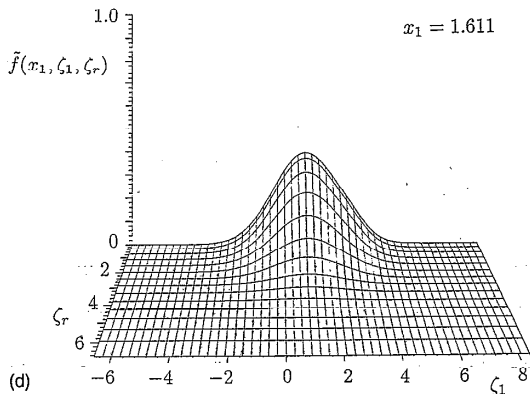


Makroskopske veličine van ravnoteže

Struktura udarnog talasa

T. Ohwada, Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A*, **5** (1), 217–234 (1993)

$M = 3.0$ – funkcija raspodele u različitim tačkama

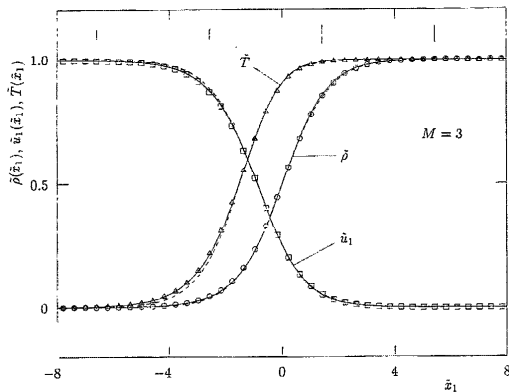


Makroskopske veličine van ravnoteže

Struktura udarnog talasa

T. Ohwada, Structure of normal shock waves: Direct numerical analysis of of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules, *Phys. Fluids A*, **5** (1), 217–234 (1993)

$M = 3.0$ – funkcija raspodele u različitim tačkama



Makroskopske veličine van ravnoteže

Makroskopske veličine

Makroskopske veličine se određuju pomoću ekvivalentne lokalno ravnotežne raspodele čiji su momenti jednaki momentima neravnotežne funkcije raspodele.

$$\int_{\mathbb{R}^3} m\psi_i(\boldsymbol{\xi}) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^3} m\psi_i(\boldsymbol{\xi}) f_M^{loc}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

Sadržaj

- 1 **Bolcmanova jednačina**
 - Funkcija raspodele
 - Bolcmanova jednačina
 - H-teorema

- 2 **Neravnotežni procesi**
 - Makroskopske veličine
 - Hidrodinamička aproksimacija

Skalirana Bolcmanova jednačina

Bezdimenzijske promenljive

- t_0 – makroskopsko referentno vreme
- l – makroskopska referentna dužina
- $v = \sqrt{2(k_B/m)T_0}$ – referentna brzina
- $t_a = l/v$ – akustičko referentno vreme

- bezdimenzijske promenljive

$$\hat{t} = t/t_0 \quad \hat{x}_i = x_i/l \quad \hat{\xi}_i = \xi_i/v$$

- funkcija raspodele

$$\hat{f} = (mv^3/\rho_0)f$$

- kolizioni presek

$$\hat{B} = \frac{B}{\sqrt{2}\pi d^2 v}$$

Skalirana Bolcmanova jednačina

Skalirana Bolcmanova jednačina

$$\text{Sh} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \sum_{i=1}^3 \hat{\xi}_i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\text{Kn}} \hat{Q}(\hat{f}, \hat{f})$$

$$\text{Sh} = \frac{t_a}{t_0} - \text{Struhalov broj} \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{l} - \text{Knudsenov broj}$$

$$\lambda = \frac{m}{\sqrt{2\pi\rho_0 d^2}} - \text{srednja dužina slobodnog puta}$$

Bardos, Golse, Levermore (1991,1993); Saint-Raymond (2009)

- $\text{Kn} \lesssim 0.01$ – hidrodinamički režim
- $0.01 \lesssim \text{Kn} \lesssim 0.1$ – “slip flow” režim
- $0.1 \lesssim \text{Kn} \lesssim 10$ – prelazni režim → jednačine momenata i BJ
- $\text{Kn} \gtrsim 10$ – “slobodni let” → DSMC

Skalirana Bolcmanova jednačina

Skalirana Bolcmanova jednačina

$$\frac{\partial f^\epsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon} Q(f^\epsilon, f^\epsilon)$$

$\epsilon \sim \text{Kn}$ – mali parametar

Asimptotski razvoj

$$f^\epsilon = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f^{(k)}$$

Uslov kompatibilnosti

$$\int_{\mathbb{R}^3} m \psi_j f^{(k)} d\xi = 0; \quad \forall k \geq 1$$

Skalirana Bolcmanova jednačina

Još asimptotskog razvoja

Protoci

$$p_{\langle ij \rangle} = \int_{\mathbb{R}^3} m C_i C_j f^\epsilon d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k p_{\langle ij \rangle}^{(k)}$$
$$q_i = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{m}{2} |\mathbf{C}|^2 f^\epsilon d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k q_i^{(k)}$$

Materijalni izvod

$$Df^\epsilon + \sum_{i=1}^3 C_i \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon} Q(f^\epsilon, f^\epsilon) \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$D = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k D_k$$

Čepmen-Enskogov metod – formalni razvoj

Asimptotski razvoj makroskopskih jednačina

$$D_0 \rho + \partial_i v_i = 0$$

$$D_k \rho = 0$$

$$\rho D_0 v_i + \partial_i p = 0$$

$$\rho D_k v_i + \partial_j p_{\langle ij \rangle}^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k_B}{m} D_0 T + p \partial_i v_i = 0$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k_B}{m} D_k T + p_{\langle ij \rangle}^{(k)} \partial_j v_i = 0$$

Asimptotski razvoj Bolcmanove jednačine

$$Q(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$$

$$2Q(f^{(0)}, f^{(1)}) = D_0 f^{(0)} + \sum_{i=1}^3 C_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i}$$

Čepmen-Enskogov metod – formalni razvoj

Asimptotski razvoj makroskopskih jednačina

$$D_0 \rho + \partial_i v_i = 0$$

$$D_k \rho = 0$$

$$\rho D_0 v_i + \partial_i p = 0$$

$$\rho D_k v_i + \partial_j p_{\langle ij \rangle}^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k_B}{m} D_0 T + p \partial_i v_i = 0$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{k_B}{m} D_k T + p_{\langle ij \rangle}^{(k)} \partial_j v_i = 0$$

Asimptotski razvoj Bolcmanove jednačine

$$Q(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$$

$$2Q(f^{(0)}, f^{(1)}) = D_0 f^{(0)} + \sum_{i=1}^3 C_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i}$$

Čepmen-Enskogov metod

Prva aproksimacija (Lokalno ravnotežna raspodela)

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{v}|^2}{2(k_B/m)T} \right\} = f_M^{loc}$$

$$\rho = \rho(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad T = T(t, \mathbf{x})$$

$$p_{ij} = p \delta_{ij} \quad p = \rho \frac{k_B}{m} T \quad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{p}{\rho} \quad q_i = 0$$

Druga aproksimacija

$$f^{(1)} = f^{(0)} \phi = f^{(0)} \left\{ -\frac{A}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{m}{k_B T} B C_i C_j \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \right\}$$

Protoci

$$p_{\langle ij \rangle}^{(1)} = -2\mu \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \quad q_i^{(1)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Hidrodinamičke jednačine su Navije-Stoks-Furijeovog tipa.

Druga aproksimacija

$$f^{(1)} = f^{(0)} \phi = f^{(0)} \left\{ -\frac{A}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{m}{k_B T} B C_i C_j \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \right\}$$

Protoci

$$p_{\langle ij \rangle}^{(1)} = -2\mu \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \quad q_i^{(1)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Hidrodinamičke jednačine su Navije-Stoks-Furijeovog tipa.

Literatura

- S. Chapman, T.G. Cowling, *The mathematical theory of nonuniform gases*, CUP 1991.
- C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer 1988.
- W.G. Vincenti, C.H. Kruger, *Introduction to physical gas dynamics*, Wiley 1965.
- Y. Sone, *Molecular Gas Dynamics*, Birkhäuser, 2007.
- H. Grad, On the kinetic theory of rarefied gases, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**(4), 1949.
- S. de Groot, P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Dover Publications
- B. Milić, *Statistička fizika*
- I. Živić, *Statistička mehanika*
- M. Pavić, *Mathematical modelling and analysis of polyatomic gases and mixtures in the context of kinetic theory of gases and fluid mechanics*, doktorska disertacija