

Primena lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre na opis spinskih sistema: za i protiv

Slobodan Radošević

Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad

13.11.2015

1 Uvod

- Spinski operatori
- $\mathfrak{su}(2)$ algebra i rotacije
- Linearna teorija spinskih talasa

2 Primena lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre

- Bozonske reprezentacije spinskih operatora
- Metod jednačina kretanja

3 Metod efektivnih lagranžijana

- Interakcija kao posledica simetrije
- Praktična primena metoda

Spinski operatori

- Komutacione relacije

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

Spinski operatori

- Komutacione relacije

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

- Svojstveni problem

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= s(s+1) |s, m\rangle, & S^3 |s, m\rangle &= m |s, m\rangle \\ m &= s, s-1, \dots, -s \end{aligned}$$

Spinski operatori

- Komutacione relacije

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

- Svojstveni problem

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= s(s+1) |s, m\rangle, & S^3 |s, m\rangle &= m |s, m\rangle \\ m &= s, s-1, \dots, -s \end{aligned}$$

- Operatori podizanja i spuštanja

$$S^\pm = S^1 \pm iS^2$$

Spinski operatori

- Komutacione relacije

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

- Svojstveni problem

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= s(s+1) |s, m\rangle, & S^3 |s, m\rangle &= m |s, m\rangle \\ m &= s, s-1, \dots, -s \end{aligned}$$

- Operatori podizanja i spuštanja

$$S^\pm = S^1 \pm iS^2$$

- Povećavanje i snižavanje z -projekcije

$$\begin{aligned} S^\pm |s, m\rangle &= \sqrt{s(s+1) - m^2 \mp m} |s, m \pm 1\rangle, \\ S^+ |s, s\rangle &= S^- |s, -s\rangle = 0 \end{aligned}$$

Spinski operatori na rešetki

- Složenije komutacione relacije

$$[S^\alpha(\mathbf{x}), S^\beta(\mathbf{y})] = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma(\mathbf{x})$$

Spinski operatori na rešetki

- Složenije komutacione relacije

$$[S^\alpha(\mathbf{x}), S^\beta(\mathbf{y})] = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma(\mathbf{x})$$

- Ukupno stanje rešetke

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{\mathbf{x}} |s, m\rangle_{\mathbf{x}}$$

Spinski operatori na rešetki

- Složenije komutacione relacije

$$[S^\alpha(\mathbf{x}), S^\beta(\mathbf{y})] = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma(\mathbf{x})$$

- Ukupno stanje rešetke

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{\mathbf{x}} |s, m\rangle_{\mathbf{x}}$$

- Kuplovanje između susednih spinova čini probleme lokalizovanih spinova netrivijalnim

Geometrijski aspekt spinskih operatora

- Relacije $[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ definišu $\mathfrak{su}(2)$ algebru

Geometrijski aspekt spinskih operatora

- Relacije $[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ definišu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- Vektor S predstavlja generator rotacija

Geometrijski aspekt spinskih operatora

- Relacije $[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ definišu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- Vektor S predstavlja generator rotacija
- Konačna rotacija oko ose e_ϕ za ugao ϕ

$$U(\theta) = \exp[i\theta \cdot S], \quad \theta = \theta e_\theta$$

Geometrijski aspekt spinskih operatora

- Relacije $[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ definišu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- Vektor S predstavlja generator rotacija
- Konačna rotacija oko ose e_ϕ za ugao ϕ

$$U(\theta) = \exp[i\theta \cdot S], \quad \theta = \theta e_\theta$$

- Komutacione relacije $[S^\alpha(x), S^\beta(y)] = \Delta(x - y)i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma(x)$ uvode lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru

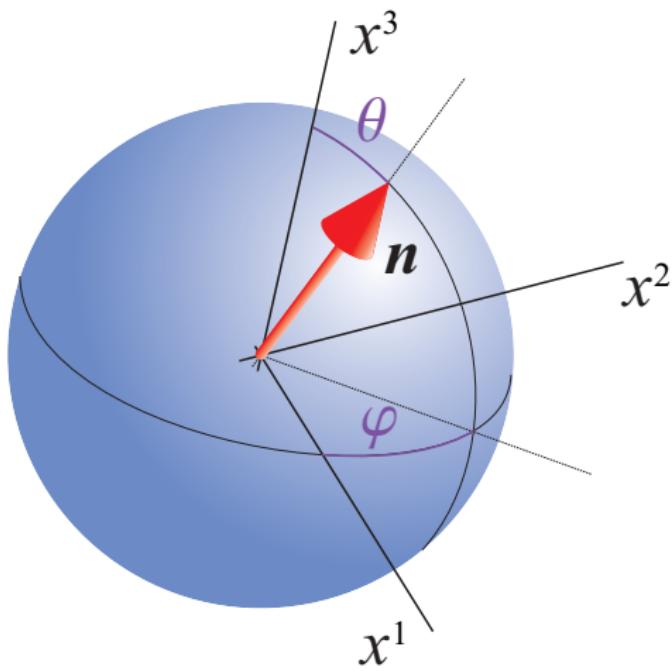
Geometrijski aspekt spinskih operatora

- Relacije $[S^\alpha, S^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$ definišu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- Vektor S predstavlja generator rotacija
- Konačna rotacija oko ose e_ϕ za ugao ϕ

$$U(\theta) = \exp [i\theta \cdot S], \quad \theta = \theta e_\theta$$

- Komutacione relacije $[S^\alpha(x), S^\beta(y)] = \Delta(x - y)i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma(x)$ uvode lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- Važan primer rotacije

$$U(\theta_1, \theta_2) = \exp [i\theta_1 S^1 + i\theta_2 S^2] : \mathbf{e}_3 \longmapsto \mathbf{n}$$



Proizvoljni jedinični vektor $\mathbf{n} = \sin \theta [e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi] + e_3 \cos \theta$ dobijen primenom $U(\theta_1, \theta_2)$ na e_3 . Veza parametara je $\theta_1 = \theta \cos \varphi$, $\theta_2 = \theta \sin \varphi$

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- O(3) Hamiltonian: $H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x S_x \cdot \nabla^2 S_x - \frac{Js(s+1)Z_1N}{2}$.

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- O(3) Hamiltonian: $H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x \mathbf{S}_x \cdot \nabla^2 \mathbf{S}_x - \frac{Js(s+1)Z_1N}{2}$.
- Osnovno stanje sa O(2) simetrijom $|0\rangle = \bigotimes_x |s, s\rangle_x$

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- O(3) Hamiltonian: $H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x \mathbf{S}_x \cdot \nabla^2 \mathbf{S}_x - \frac{Js(s+1)Z_1N}{2}$.
- Osnovno stanje sa O(2) simetrijom $|0\rangle = \bigotimes_x |s, s\rangle_x$
- LSW linearizacija $[S^+(x, \tau), S^-(y, \tau)] \approx 2s \Delta(x - y)$

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- O(3) Hamiltonian: $H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x S_x \cdot \nabla^2 S_x - \frac{Js(s+1)Z_1N}{2}$.
- Osnovno stanje sa O(2) simetrijom $|0\rangle = \bigotimes_x |s, s\rangle_x$
- LSW linearizacija $[S^+(x, \tau), S^-(y, \tau)] \approx 2s \Delta(x - y)$
- Linearna jednačina Šredingerovog tipa

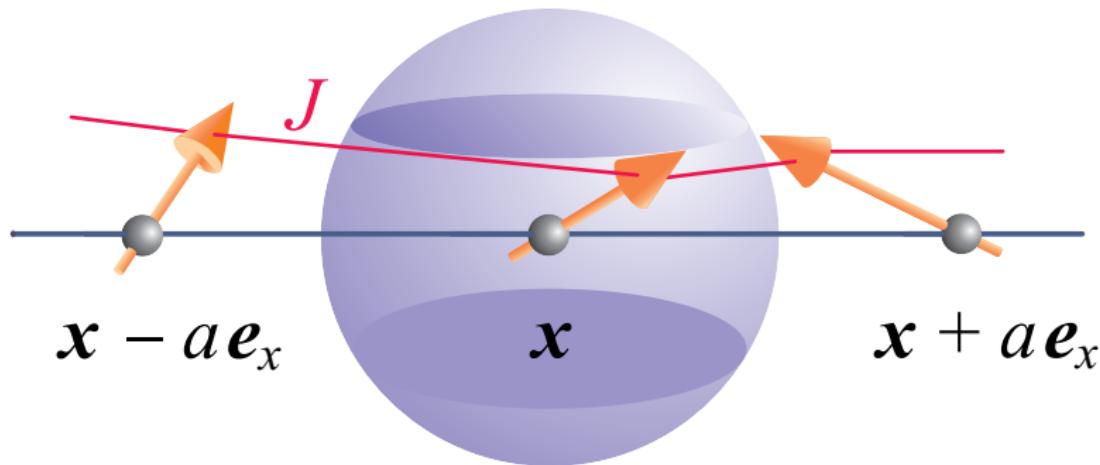
$$-\partial_\tau S^+(x) = -\frac{1}{2m_{\text{LSW}}} \nabla^2 S^+(x), \quad m_{\text{LSW}} = \frac{3}{JsZ_1|\lambda|^2}$$

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- O(3) Hamiltonian: $H = -\frac{1}{2} \frac{JZ_1|\lambda|^2}{2D} \sum_x S_x \cdot \nabla^2 S_x - \frac{Js(s+1)Z_1N}{2}$.
- Osnovno stanje sa O(2) simetrijom $|0\rangle = \bigotimes_x |s, s\rangle_x$
- LSW linearizacija $[S^+(x, \tau), S^-(y, \tau)] \approx 2s \Delta(x - y)$
- Linearna jednačina Šredingerovog tipa

$$-\partial_\tau S^+(x) = -\frac{1}{2m_{\text{LSW}}} \nabla^2 S^+(x), \quad m_{\text{LSW}} = \frac{3}{JsZ_1|\lambda|^2}$$
- Energija elementarnih ekscitacija - magnona: $\omega(\mathbf{k}) = \frac{\hat{k}^2}{2m_{\text{LSW}}}$
 Važno je primetiti da $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ pri $\mathbf{k} \rightarrow 0$ što je manifestacija Goldstonove teoreme

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet



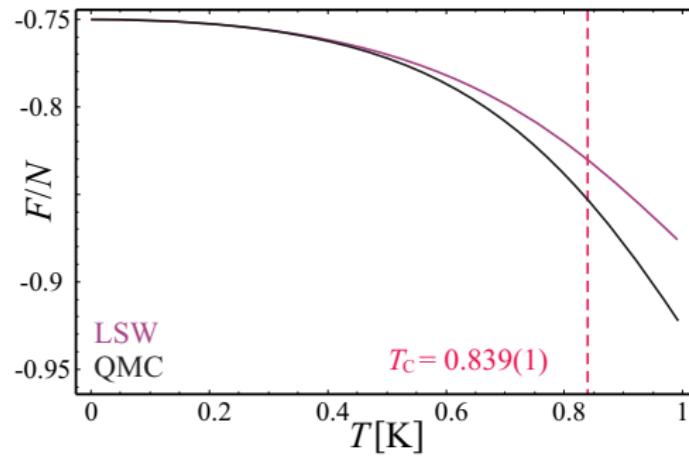
Predstava spinskih talasa (magnona) u slici lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- Aproksimacija $S_x^3 \approx s$ je vrlo gruba. Koliko se LSW slaže sa eksperimentom/simulacijama?

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

- Aproksimacija $S_x^3 \approx s$ je vrlo gruba. Koliko se LSW slaže sa eksperimentom/simulacijama?
- Odgovor: Iznenadjuće dobro



Slobodna energija 3D feromagneta izračunata pomoću kvantne Monte Karlo (QMC) simulacije i LSW teorije

Linearna teorija spinskih talasa (LSW) za 3D feromagnet

LSW rezultati otvaraju dva važna pitanja:

- Kako objasniti uspeh LSW teorije?
- Kako sistematski uračunati efekte magnon-magnon iterakcija?

Standardni odgovori se zasnivaju na detaljnijoj analizi lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre (npr. bozonske reprezentacije i jednačine kretanja)

Nelinearna teorija spinskih talasa

- Osnovna ideja: pronaći neku kombinaciju bozonskih operatora koji reprodukuju lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru

Nelinearna teorija spinskih talasa

- Osnovna ideja: pronaći neku kombinaciju bozonskih operatora koji reprodukuju lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- LSW: operatori S_x^\pm kreiraju pobđenje koje se prenosi kroz kristal

$$S_x^+ \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{LSW}}{=} s$$

Nelinearna teorija spinskih talasa

- Osnovna ideja: pronaći neku kombinaciju bozonskih operatora koji reprodukuju lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- LSW: operatori S_x^\pm kreiraju pobđenje koje se prenosi kroz kristal

$$S_x^+ \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{LSW}}{=} s$$

- Idealna reprezentacija (sa stanovišta LSW) glasi

$$S_x^+ \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{ideal}}{=} f(a_x, a_x^\dagger)$$

Nelinearna teorija spinskih talasa

- Osnovna ideja: pronaći neku kombinaciju bozonskih operatora koji reprodukuju lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- LSW: operatori S_x^\pm kreiraju pobđenje koje se prenosi kroz kristal

$$S_x^+ \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{LSW}}{=} s$$

- Idealna reprezentacija (sa stanovišta LSW) glasi

$$S_x^+ \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{ideal}}{=} f(a_x, a_x^\dagger)$$

- Idealna reprezentacija je nemoguća

Nelinearna teorija spinskih talasa

- Osnovna ideja: pronaći neku kombinaciju bozonskih operatora koji reprodukuju lokalnu $\mathfrak{su}(2)$ algebru
- LSW: operatori S_x^\pm kreiraju pobđenje koje se prenosi kroz kristal

$$S_x^+ \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{LSW}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{LSW}}{=} s$$

- Idealna reprezentacija (sa stanovišta LSW) glasi

$$S_x^+ \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x, \quad S_x^- \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{2s}a_x^\dagger, \quad S_x^3 \stackrel{\text{ideal}}{=} f(a_x, a_x^\dagger)$$

- Idealna reprezentacija je nemoguća
- Postoje mnoga druga rešenja: Holštajn-Primakof, Dajson-Malejev, Švinger, Goldhirš, Vilen, Barjaktar-Krivoručko-Jablonski, Agranović-Tošić...

Reprezentacija Holštajn-Primakovfa

- Standardna i verovatno najčešće korišćena

$$\begin{aligned} S_x^3 &= s - a_x^\dagger a_x \equiv s - n_x \\ \hat{S}_x^+ &= \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}} a_x \\ \hat{S}_x^- &= \sqrt{2s} a_x^\dagger \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}} \end{aligned}$$

Reprezentacija Holštajn-Primakovfa

- Standardna i verovatno najčešće korišćena

$$S_x^3 = s - a_x^\dagger a_x \equiv s - n_x$$

$$\hat{S}_x^+ = \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}} a_x$$

$$\hat{S}_x^- = \sqrt{2s} a_x^\dagger \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}}$$

- Efekti interakcija se dobijaju razvojem korene funkcije u red i primenom perturbativnog računa

Reprezentacija Holštajn-Primakovfa

- Standardna i verovatno najčešće korišćena

$$\begin{aligned} S_x^3 &= s - a_x^\dagger a_x \equiv s - n_x \\ \hat{S}_x^+ &= \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}} a_x \\ \hat{S}_x^- &= \sqrt{2s} a_x^\dagger \sqrt{1 - \frac{n_x}{2s}} \end{aligned}$$

- Efekti interakcija se dobijaju razvojem korene funkcije u red i primenom perturbativnog računa
- Obično se zadržavaju članovi četvrtog reda po bozonskim operatorima, što daje vrlo dobro slaganje sa eksperimentom/simulacijom

Problemi HP reprezentacije

- Kako opravdati razvoj $\sqrt{1 - n_x/(2s)}$?

Često se navode dva odgovora

- ① Razvoj po stepenima $1/s$ - problematično za najvažniji slučaj $s = 1/2$
- ② Razvoj po stepenima $\langle n_x \rangle/(2s)$ - mean-field argument

Problemi HP reprezentacije

- Kako opravdati razvoj $\sqrt{1 - n_x/(2s)}$?
Često se navode dva odgovora
 - ① Razvoj po stepenima $1/s$ - problematično za najvažniji slučaj $s = 1/2$
 - ② Razvoj po stepenima $\langle n_x \rangle/(2s)$ - mean-field argument
- Hilbertov prostor bozonskih operatora i nefizička stanja

Problemi HP reprezentacije

- Kako opravdati razvoj $\sqrt{1 - n_x/(2s)}$?
Često se navode dva odgovora
 - ① Razvoj po stepenima $1/s$ - problematično za najvažniji slučaj $s = 1/2$
 - ② Razvoj po stepenima $\langle n_x \rangle/(2s)$ - mean-field argument
- Hilbertov prostor bozonskih operatora i nefizička stanja
- Bozonizacija jednojonske anizotropije, $D \sum_x [S_x^3]^2$

Problemi HP reprezentacije

- Kako opravdati razvoj $\sqrt{1 - n_x/(2s)}$?
Često se navode dva odgovora
 - ① Razvoj po stepenima $1/s$ - problematično za najvažniji slučaj $s = 1/2$
 - ② Razvoj po stepenima $\langle n_x \rangle/(2s)$ - mean-field argument
- Hilbertov prostor bozonskih operatora i nefizička stanja
- Bozonizacija jednojonske anizotropije, $D \sum_x [S_x^3]^2$
- Ukratko, svaki približni izraz za spinske operatore narušava $\mathfrak{su}(2)$ algebru i Hilbertov prostor spinskih operatora

Linearizacije jednačina kretanja

- Polazeći od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre, nalaze se (nelinearne) jednajne kretanja za spinske operatore

Linearizacije jednačina kretanja

- Polazeći od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre, nalaze se (nelinearne) jednajne kretanja za spinske operatore
- Rešive linearne jednačine se dobijaju *ad hoc* uprošćavanjima jednačina kretanja

Linearizacije jednačina kretanja

- Polazeći od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre, nalaze se (nelinearne) jednajne kretanja za spinske operatore
- Rešive linearne jednačine se dobijaju *ad hoc* uprošćavanjima jednačina kretanja
- Poznato je više linearizacija: Tjablikov (RPA), Kalen (CA), Kondo-Jamađi (KYA)...

Linearizacije jednačina kretanja

- Polazeći od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre, nalaze se (nelinearne) jednajne kretanja za spinske operatore
- Rešive linearne jednačine se dobijaju *ad hoc* uprošćavanjima jednačina kretanja
- Poznato je više linearizacija: Tjablikov (RPA), Kalen (CA), Kondo-Jamađi (KYA)...
- Daju dobro slaganje sa eksperimentom/simulacijom u širokom temperaturskom intervalu

Nedostaci metoda linearizacije jednačina kretanja

- Fizička slika aproksimacije je potpuno nejasna
 - ➊ Koje interakcije su zadržane linearizacijom?
 - ➋ Pomoću kojeg hamiltonijana se računaju srednje vrednosti?

Nedostaci metoda linearizacije jednačina kretanja

- Fizička slika aproksimacije je potpuno nejasna
 - 1 Koje interakcije su zadržane linearizacijom?
 - 2 Pomoću kojeg hamiltonijana se računaju srednje vrednosti?
- Računi se komplikuju sa povećanjem s , iako bi trebalo da je obrnuto
 - 1 (Polu)egzaktno računanje unutrašnje energije moguće samo za $S = 1/2$
 - 2 Jednojonska anizotropija ($D \sum_x [S_x^3]^2$) unosi velike komplikacije

Nedostaci metoda linearizacije jednačina kretanja

- Fizička slika aproksimacije je potpuno nejasna
 - 1 Koje interakcije su zadržane linearizacijom?
 - 2 Pomoću kojeg hamiltonijana se računaju srednje vrednosti?
- Računi se komplikuju sa povećanjem s , iako bi trebalo da je obrnuto
 - 1 (Polu)egzaktno računanje unutrašnje energije moguće samo za $S = 1/2$
 - 2 Jednojonska anizotropija ($D \sum_x [S_x^3]^2$) unosi velike komplikacije
- Nije moguće sukcesivno poboljšanje aproksimacije jer se radi sa operatorima u Hajzenbergovoj slici

Magnoni i rotacije

- Teorija perturbacija za Goldstonove bozone

Magnoni i rotacije

- Teorija perturbacija za Goldstonove bozone
- Spontano narušavanje simetrije kod Hajzenbergovog modela:
 $O(3) \rightarrow O(2)$ - prostor na kojem žive magnoni je $O(3)/O(2) = S^2$ (sféra)

Magnoni i rotacije

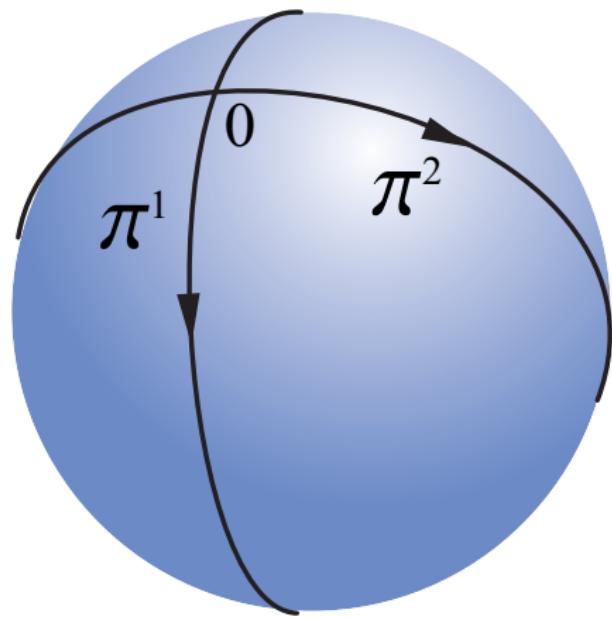
- Teorija perturbacija za Goldstonove bozone
- Spontano narušavanje simetrije kod Hajzenbergovog modela:
 $O(3) \rightarrow O(2)$ - prostor na kojem žive magnoni je $O(3)/O(2) = S^2$ (sfera)
- U spektru postoje **dva realna** Goldstonova polja, $\pi^1(x, t)$ i $\pi^2(x, t)$ koja se mogu shvatiti kao (lokalne) koordinate na sferi

Magnoni i rotacije

- Teorija perturbacija za Goldstonove bozone
- Spontano narušavanje simetrije kod Hajzenbergovog modela:
 $O(3) \rightarrow O(2)$ - prostor na kojem žive magnoni je $O(3)/O(2) = S^2$ (sfera)
- U spektru postoje **dva realna** Goldstona polja, $\pi^1(x, t)$ i $\pi^2(x, t)$ koja se mogu shvatiti kao (lokalne) koordinate na sferi
- Jedna od parametrizacija magnonskih polja je rotacija

$$U(\boldsymbol{\pi}) = \exp[i\pi^1(x)S_1 + i\pi^2(x)S_2]$$

Geometrijska predstava magnona kao koordinata na sferi



Interakcije magnona i simetrije

- Efektivni lagranžijan mora da sadrži sve simetrije Hajzenbergovog modela: Unutrašnju $O(3)$ simetriju i diskretnu simetriju rešetke

Interakcije magnona i simetrije

- Efektivni lagranžijan mora da sadrži sve simetrije Hajzenbergovog modela: Unutrašnju $O(3)$ simetriju i diskretnu simetriju rešetke
- Najopštija $O(3)$ invarijantna funkcija na $O(3)/O(2) = S^2$ sa najmanjim brojem izvoda je

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \Sigma \frac{\partial_t \pi^1 \pi^2 - \partial_t \pi^2 \pi^1}{1 + \sqrt{1 - \pi^2}} - \frac{F^2}{2} g_{ab}(\boldsymbol{\pi}) \partial_\alpha \pi^a \partial_\alpha \pi^b, \quad a, b = 1, 2$$

$g_{ab}(\boldsymbol{\pi})$ – metrika od S^2

Σ = Ns (magnetizacija osnovnog stanja)

F – unapred neodređena konstanta

Interakcije magnona i simetrije

- Efektivni lagranžijan mora da sadrži sve simetrije Hajzenbergovog modela: Unutrašnju $O(3)$ simetriju i diskretnu simetriju rešetke
- Najopštija $O(3)$ invarijantna funkcija na $O(3)/O(2) = S^2$ sa najmanjim brojem izvoda je

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \Sigma \frac{\partial_t \pi^1 \pi^2 - \partial_t \pi^2 \pi^1}{1 + \sqrt{1 - \pi^2}} - \frac{F^2}{2} g_{ab}(\boldsymbol{\pi}) \partial_\alpha \pi^a \partial_\alpha \pi^b, \quad a, b = 1, 2$$

$g_{ab}(\boldsymbol{\pi})$ – metrika od S^2

Σ = Ns (magnetizacija osnovnog stanja)

F – unapred neodređena konstanta

- Član sa prvim izvodima po vremenu je WZ član – invarijantan je do na totalni izvod i odgovoran za "nerelativističku" disperziju feromagnetičnih magnona

Kanonsko kvantovanje

- Pogodno je uvesti kompleksno polje $\psi(x) = \sqrt{\frac{\Sigma}{2}} [\pi^1(x) + i\pi^2(x)]$

Kanonsko kvantovanje

- Pogodno je uvesti kompleksno polje $\psi(x) = \sqrt{\frac{\Sigma}{2}} [\pi^1(x) + i\pi^2(x)]$
- Kanonski impuls

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = \frac{2i\psi}{1 + \sqrt{1 - (2/\Sigma)\psi^\dagger\psi}}$$

Kanonsko kvantovanje

- Pogodno je uvesti kompleksno polje $\psi(x) = \sqrt{\frac{\Sigma}{2}} [\pi^1(x) + i\pi^2(x)]$
- Kanonski impuls

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = \frac{2i\psi}{1 + \sqrt{1 - (2/\Sigma)\psi^\dagger\psi}}$$

- Ova teorija je komplikovana jer deo interakcija ulazi kroz kanonske komutacione relacije $[\psi(x), \Pi(y)] = i\delta(x - y)$ dok je $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi, \psi^\dagger)$
- Pristup podseća na analizu lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre

Kanonsko kvantovanje

- Bolja strategija je eliminisati članove $\propto \partial_t$ korišćenjem jednačina kretanja za magnonska polja

Kanonsko kvantovanje

- Bolja strategija je eliminisati članove $\propto \partial_t$ korišćenjem jednačina kretanja za magnonska polja
- Tako dobijeni hamiltonijan prebacimo sa kontinuuma na rešetku i nalazimo hamiltonijan koji zadovoljava sve simetrije Hajzenbergovog modela (u datom redu teorije perturbacija)

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H_{\text{int}},$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m_0}v_0 \sum_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}), \quad m_0 = \frac{\Sigma}{2F^2},$$

$$H_{\text{int}} = H_4^{(a)} + H_4^{(b)} + H_8^{(a)} + H_8^{(b)},$$

Kanonsko kvantovanje

- Bolja strategija je eliminisati članove $\propto \partial_t$ korišćenjem jednačina kretanja za magnonska polja
- Tako dobijeni hamiltonijan prebacimo sa kontinuuma na rešetku i nalazimo hamiltonijan koji zadovoljava sve simetrije Hajzenbergovog modela (u datom redu teorije perturbacija)

$$H_{\text{eff}} = H_0 + H_{\text{int}},$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m_0}v_0 \sum_{\mathbf{x}} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}), \quad m_0 = \frac{\Sigma}{2F^2},$$

$$H_{\text{int}} = H_4^{(a)} + H_4^{(b)} + H_8^{(a)} + H_8^{(b)},$$

- $H_4^{(a)}$, $H_4^{(b)}$, $H_8^{(a)}$ i $H_8^{(b)}$ sadrže proizvode 4 i 8 magnonskih operatora

Prednosti metoda efektivnih lagranžijana

- Dinamika magnona je potpuno nezavisna od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre spinskih operatora

Prednosti metoda efektivnih lagranžijana

- Dinamika magnona je potpuno nezavisna od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre spinskih operatora
- Hilbertov prostor nema veze sa vektorima $|s, m\rangle_x$ jer je "čist bozonski" (nema problema nefizičkih stanja $m > 2s$)

Prednosti metoda efektivnih lagranžijana

- Dinamika magnona je potpuno nezavisna od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre spinskih operatora
- Hilbertov prostor nema veze sa vektorima $|s, m\rangle_x$ jer je "čist bozonski" (nema problema nefizičkih stanja $m > 2s$)
- Jednostavno objašnjenje uspeha LSW: magnoni (kao i svi Goldstonovi bozoni) interaguju slabo jer su derivativno kuplovani. Npr.

$$H_4^{(a)} = \frac{F^2}{8} \nu_0 \sum_x \pi^2(x) \pi(x) \cdot \nabla^2 \pi(x)$$

Prednosti metoda efektivnih lagranžijana

- Dinamika magnona je potpuno nezavisna od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre spinskih operatora
- Hilbertov prostor nema veze sa vektorima $|s, m\rangle_x$ jer je "čist bozonski" (nema problema nefizičkih stanja $m > 2s$)
- Jednostavno objašnjenje uspeha LSW: magnoni (kao i svi Goldstonovi bozoni) interaguju slabo jer su derivativno kuplovani. Npr.

$$H_4^{(a)} = \frac{F^2}{8} v_0 \sum_x \pi^2(x) \pi(x) \cdot \nabla^2 \pi(x)$$

- $H_4^{(a)}$ i $H_8^{(a)}$ su posledica postojanja WZ člana - zbog toga su specifični za O(3) feromagnet (nema ih kod O(2) feromagneta ili O(3) antiferomagneta)

Prednosti metoda efektivnih lagranžijana

- Dinamika magnona je potpuno nezavisna od lokalne $\mathfrak{su}(2)$ algebre spinskih operatora
- Hilbertov prostor nema veze sa vektorima $|s, m\rangle_x$ jer je "čist bozonski" (nema problema nefizičkih stanja $m > 2s$)
- Jednostavno objašnjenje uspeha LSW: magnoni (kao i svi Goldstonovi bozoni) interaguju slabo jer su derivativno kuplovani. Npr.

$$H_4^{(a)} = \frac{F^2}{8} v_0 \sum_x \pi^2(x) \pi(x) \cdot \nabla^2 \pi(x)$$

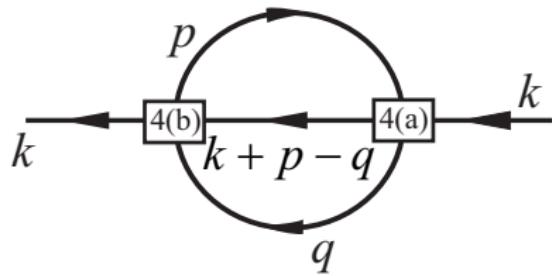
- $H_4^{(a)}$ i $H_8^{(a)}$ su posledica postojanja WZ člana - zbog toga su specifični za O(3) feromagnet (nema ih kod O(2) feromagneta ili O(3) antiferomagneta)
- Jednojonska anizotropija se uračunava trivijalno $\propto D[1 - \pi^2(x)]$

Perturbativni račun

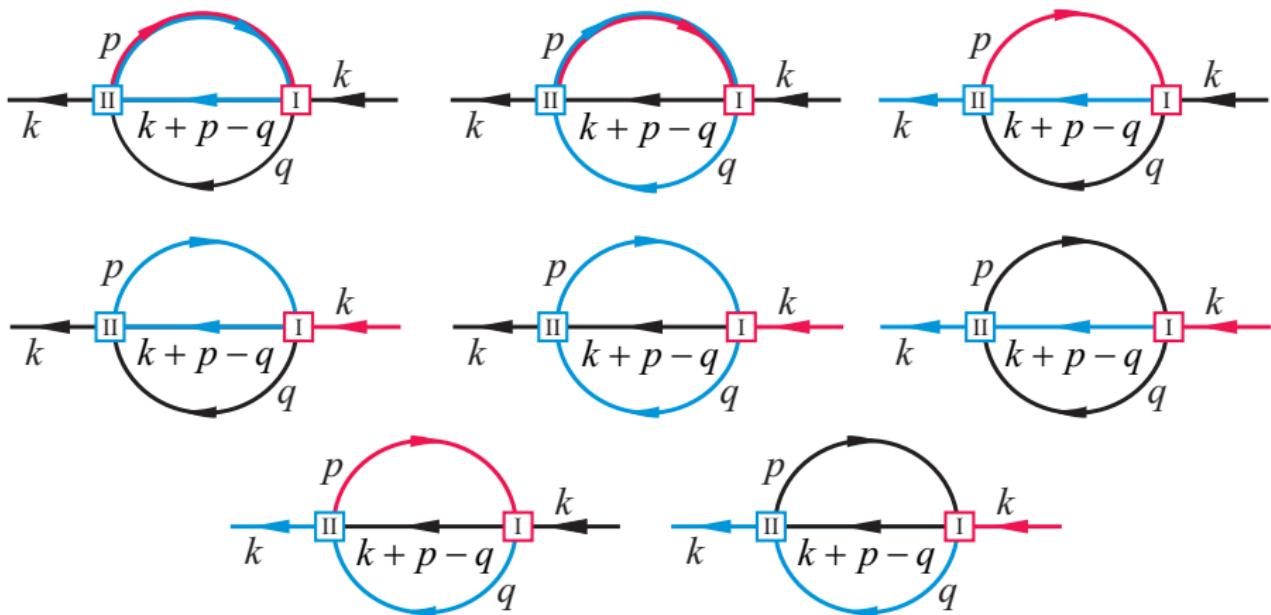
- Pogodno je uvesti posebnu vrstu Fejnmanovih dijagrma - obojeni dijagrami

Perturbativni račun

- Pogodno je uvesti posebnu vrstu Fejnmanovih dijagrma - obojeni dijagrami
- Primer dijagraama za 2-loop doprinos magnonskoj energiji

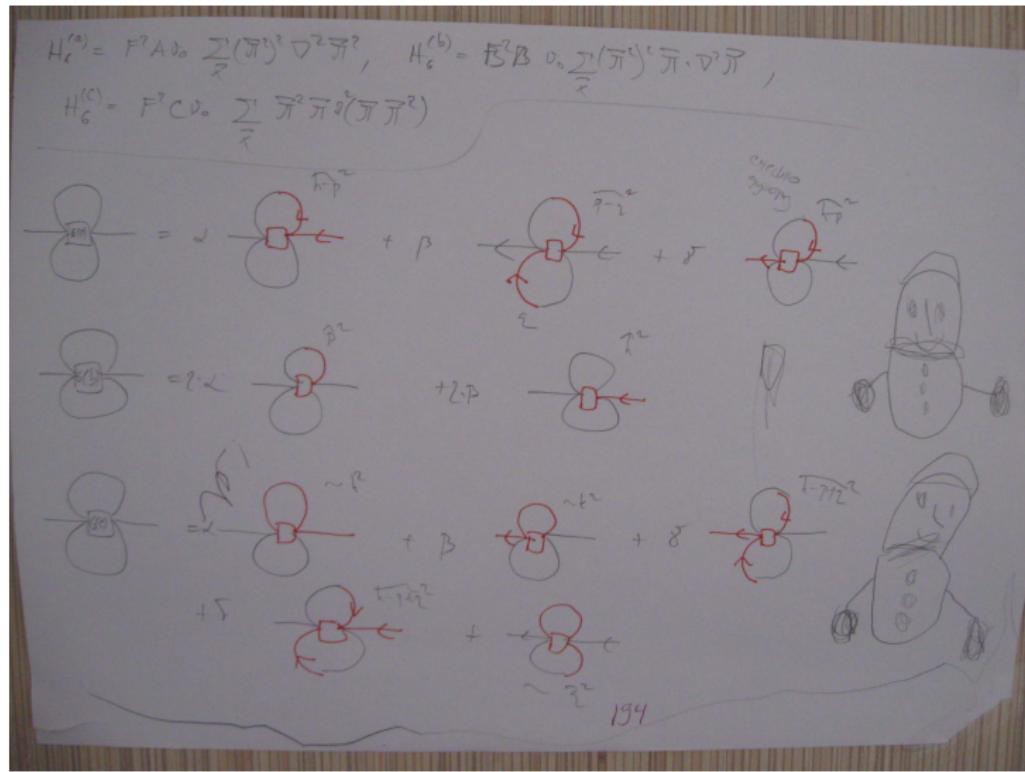


Perturbativni račun



gde je $I \equiv H_4^{(a)}$ i $II \equiv H_4^{(b)}$

Klasa dijagrama koja se pojavljuje u CA



Neki rezultati

- Reprodukovani su standardni rezultati nelinearnih teorija spinskih talasa (tzv. Dajsonov rezultat)

Neki rezultati

- Reprodukovani su standardni rezultati nelinearnih teorija spinskih talasa (tzv. Dajsonov rezultat)
- Perturbativni račun sa obojenim dijagramima omogućava da se ode i korak dalje: Izračunate su popravke višeg reda u odnosu na Dajsonov rezultat

Neki rezultati

- Reprodukovani su standardni rezultati nelinearnih teorija spinskih talasa (tzv. Dajsonov rezultat)
- Perturbativni račun sa obojenim dijagramima omogućava da se ode i korak dalje: Izračunate su popravke višeg reda u odnosu na Dajsonov rezultat
- Teorija Goldstonovih bozona na rešetki daje odlično slaganje sa QMC

Neki rezultati

- Reprodukovani su standardni rezultati nelinearnih teorija spinskih talasa (tzv. Dajsonov rezultat)
- Perturbativni račun sa obojenim dijagramima omogućava da se ode i korak dalje: Izračunate su popravke višeg reda u odnosu na Dajsonov rezultat
- Teorija Goldstonovih bozona na rešetki daje odlično slaganje sa QMC
- Dobija se poklapanje sa računima baziranim na funkcionalnoj integraciji uz korišćenje dimenzione regularizacije

Neki rezultati

- Reprodukovani su standardni rezultati nelinearnih teorija spinskih talasa (tzv. Dajsonov rezultat)
- Perturbativni račun sa obojenim dijagramima omogućava da se ode i korak dalje: Izračunate su popravke višeg reda u odnosu na Dajsonov rezultat
- Teorija Goldstonovih bozona na rešetki daje odlično slaganje sa QMC
- Dobija se poklapanje sa računima baziranim na funkcionalnoj integraciji uz korišćenje dimenzione regularizacije
- Ponuđeno je objašnjenje standardnih metoda linearizacije jednačina kretanja (RPA, CA i KYA) pomoću magnon-magnon interakcija

Odabrane reference

- Bozonske reprezentacije spinskih operatora:
 - ① SFIN **V** 2, 27-49 (1992)
- Metod jednačina kretanja:
 - ① Phys. Repts. **432**, 223–304 (2006)
- Metod efektivnih lagranžijana:
 - ① Phys. Rev. D **49**, 3033-3043 (1994), Phys. Rev. X **4**, 031057 (2014)
 - ② Phys. Rev. B **60**, 388-405 (1999) , Phys. Rev. B **84**, 064414 (2011), arXiv:1510.08930 (2015)
 - ③ Ann. Phys. **339**, 382–411 (2013), Ann. Phys. **362**, 336–362 (2015)