



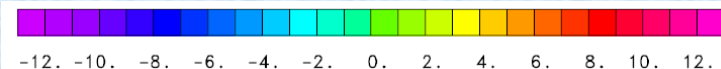
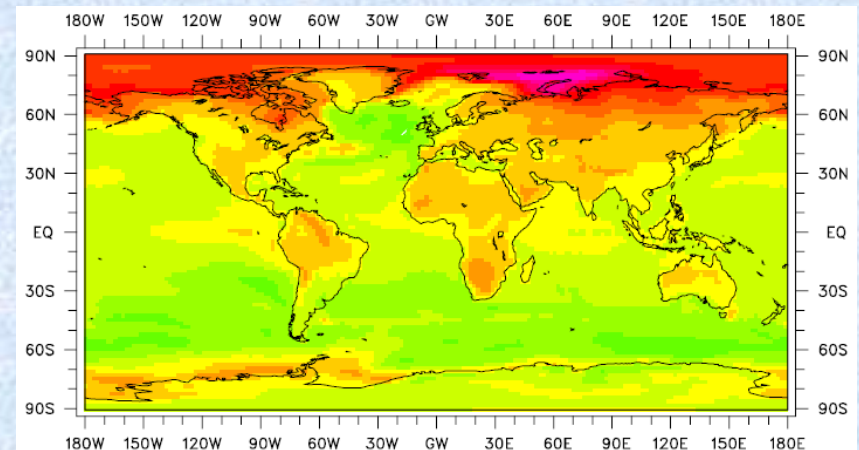
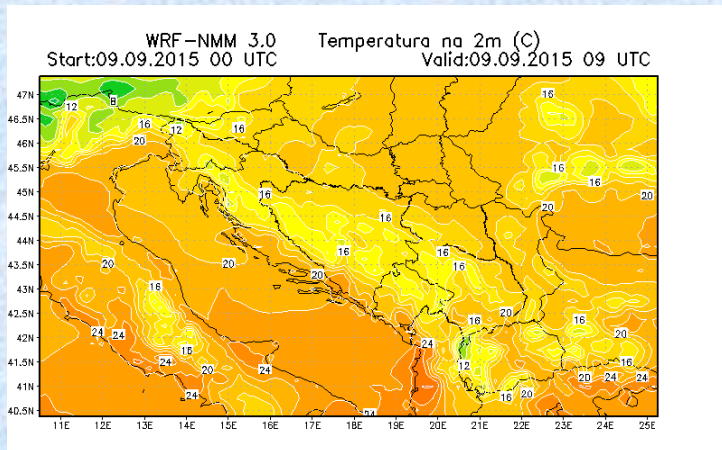
Pojava haosa pri izračunavanju temperature na površini zemljišta

MSc Gordan Mimić

Departman za fiziku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Modeli životne sredine

- Opisuju razne procese u prirodi
- Pomažu nam da predvidimo buduće stanje sistema
- Osnovna informacija koju imamo o stanju sistema dobija se merenjem njegovih fizičkih karakteristika
- Model = jedna ili više diferencijalnih jednačina koje adekvatno opisuju evoluciju stanja usled fizičkih procesa koji se odvijaju u tom sistemu



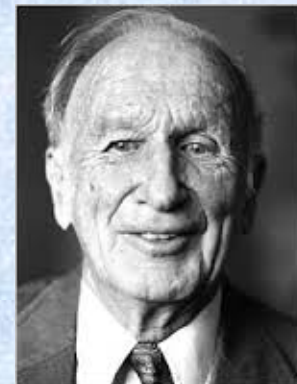
Modeli životne sredine

- Rešavanje diferencijalnih jednačina
 - analitičkim metodama - za idealizovane i znatno pojednostavljene slučajeve – linearizovane sisteme jednačina
 - rešavanje u opštijem, nelinearnom obliku izvodivo je jedino numeričkim metodama
- Metod mreže tačaka - skup tačaka u prostoru za koje se računaju vrednosti zavisno promenljivih veličina (npr. temperatura, pritisak, vlažnost vazduha i td.)
- Spektralni metod - zavisno promenljive veličine se razviju u ortogonalne redove, koji se uvrste u sistem jednačina
- Greške koje se javljaju u rezultatima modela potiču:
 - od toga što ne poznajemo u potpunosti kako se procesi zapravo odvijaju
 - od same prirode procesa jer pojedini sistemi ispoljavaju haotično ponašanje

Dinamički sistemi

- Matematički model predstavljen sa jednom ili više jednačina (koliko promenljivih je potrebno da se pojava u potpunosti opiše)
- Jednačine su u diferencijalnom ili diferencnom obliku (da li vreme posmatramo kontinualno ili u diskretnim koracima)
- Diferencijalne jednačine mogu da budu obične ili parcijalne (da li je u njima diferenciranje po vremenu predstavljeno totalnim ili lokalnim izvodom)
- Diferencne jednačine imaju oblik iterativnih mapa
- Podela dinamičkih sistema na autonomne i neautonomne
 - Autonomni (vreme se ne pojavljuje eksplicitno dok su sve promenljive zavisne od vremena)
 - Neautonomni (vreme se pojavljuje eksplicitno, kada deluje neka vremenski zavisna sila)

Haos

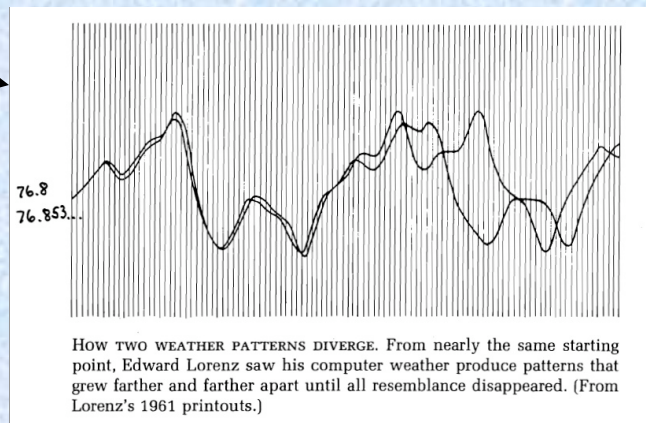


- Whether prediction or not !? →

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$



- Edward N. Lorenz (1963) Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of Atmospheric Sciences* vol. **20**, 130-141
- x , y i z apstraktne promenljive
 - x brzina rotacije
 - y temperaturna razlika između uzdižućeg i spuštajućeg fluida
 - z odstupanje od linearnog vertikalnog temperaturnog profila
 - r Reynoldsov broj, σ Prantlov broj (bezdimenzioni indikatori turbulentnog kretanja)
 - b razmer cilindra

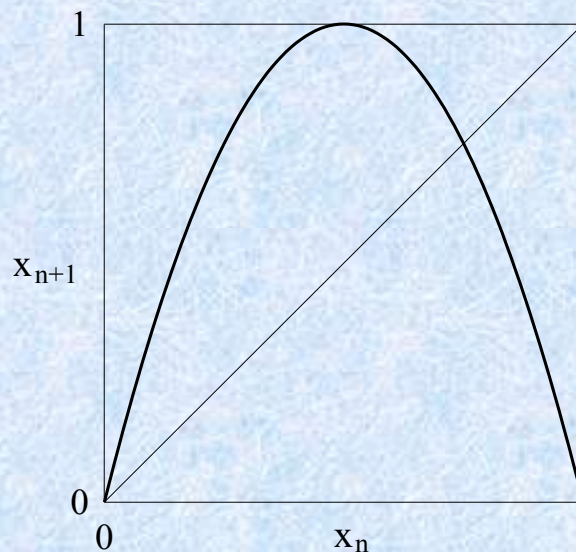
Haos

- Haotično ponašanje sistema
 - Neperiodično
 - Osetljivost na početne uslove (samim tim nepredvidivo dugoročno)
 - Uticaj *kontrolnih parametara*, mala promena u vrednostima utiče na pojavu ili nestanak haosa
 - Jednačine su nelinearne

Logistička mapa

- Logistička mapa (biologija, ekologija, ekonomija...)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



Elementi skupa leže u intervalu $(0,1)$

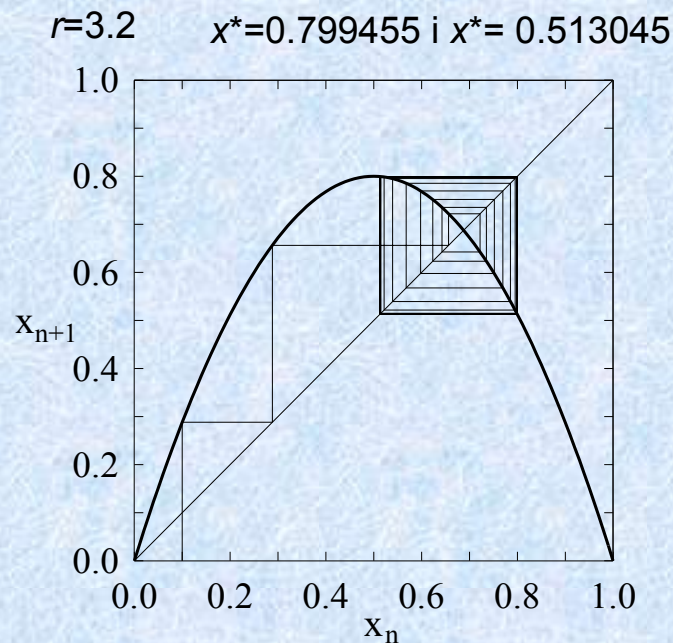
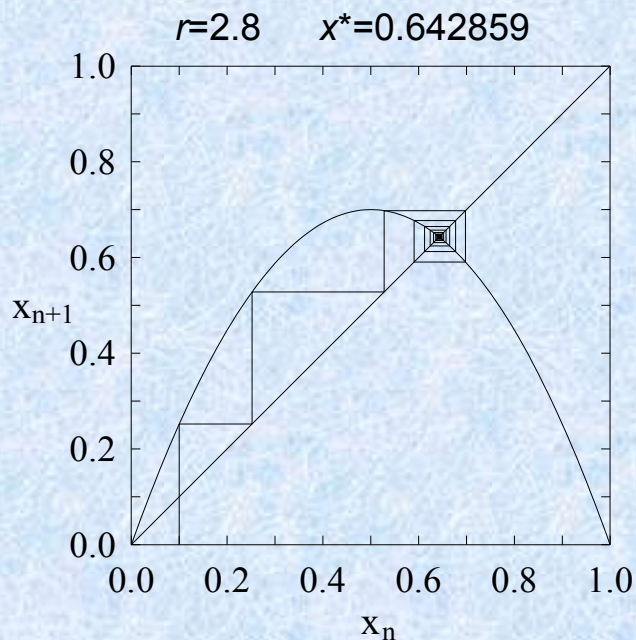
Netrivijalno ponašanje za vrednosti parametra $1 < r < 4$

Tačke ekvilibrijuma ili fiksne tačke dinamičkog sistema proizilaze iz uslova $f(x)=x$

$$x^*=0 \text{ i } x^*=1-1/r \quad (1 < r < 3)$$

Logistička mapa

- Fiksna tačka x^* će biti:
- Ponor - ako su sve tačke iz okoline ε ($\varepsilon > 0$) koje su dovoljno bliske x^* tokom iteracija privučene od strane x^* , $|f'(x^*)| < 1$
- Izvor - ukoliko su sve tačke iz okoline ε ($\varepsilon > 0$) koje su dovoljno bliske x^* tokom iteracija odbijene od x^* , $|f'(x^*)| > 1$

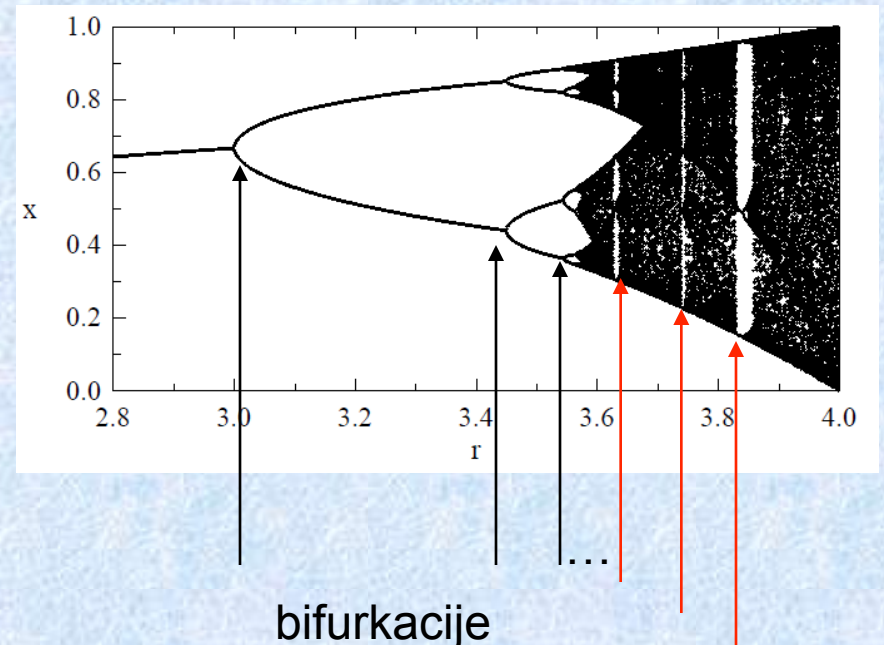
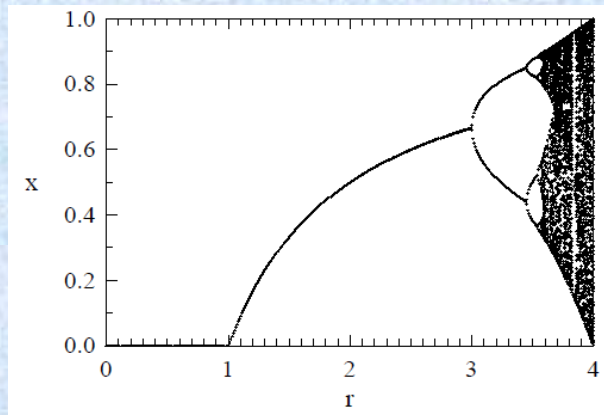


Bifurkacije

- Period 2 postoji za svako $r > 3$ ali postaje nestabilan kada r dostigne vrednost $1 + \sqrt{6}$, što je približno na $r=3.449490$. Tada se javljaju stabilna rešenja sa periodom 4
- Proces se nastavlja sa uzastopnim periodima udvajanja, tako što se pojavi novi period kada prethodni postane nestabilan – bifurkacije
- **Bifurkacije – stanice na putu u kaos**
- Period 8 za $r=3.544090$,
- period 16 za $r=3.564407$,
- period 32 za $r=3.568759$,
- period 64 za $r=3.569692$
- $r_{\infty}=3.5699456718$ tačka nagomilavanja, postoje svi periodi
- Fajgenbaumov broj
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669201...$$

Bifurkacije

Bifurkacioni dijagram



Uređenje Šarkovskog

$$3 > 5 > 7 > \dots > 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > 2 \cdot 7 > \dots > 2^2 \cdot 3 > 2^2 \cdot 5 > 2^2 \cdot 7 > \dots \\ > 2^n \cdot 3 > 2^n \cdot 5 > 2^n \cdot 7 > \dots > 2^n > \dots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1.$$

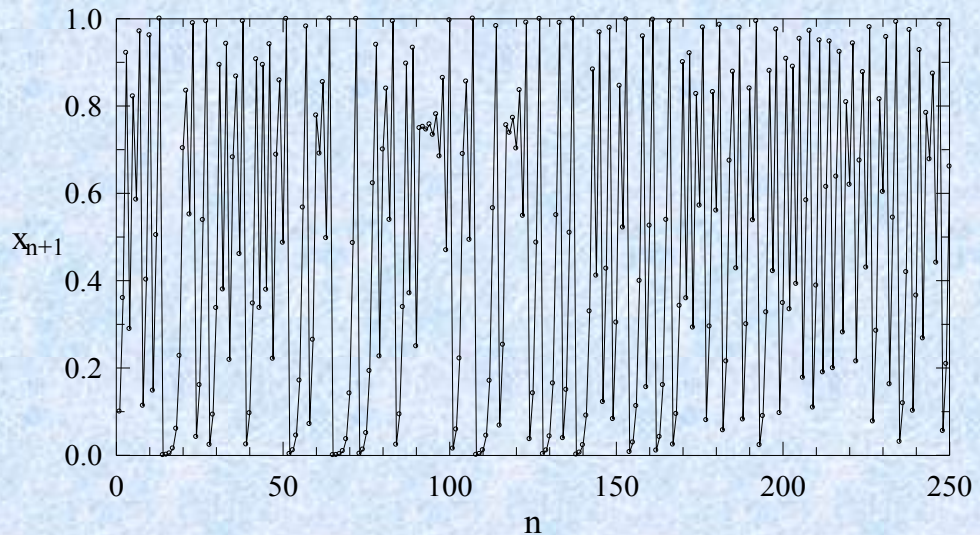
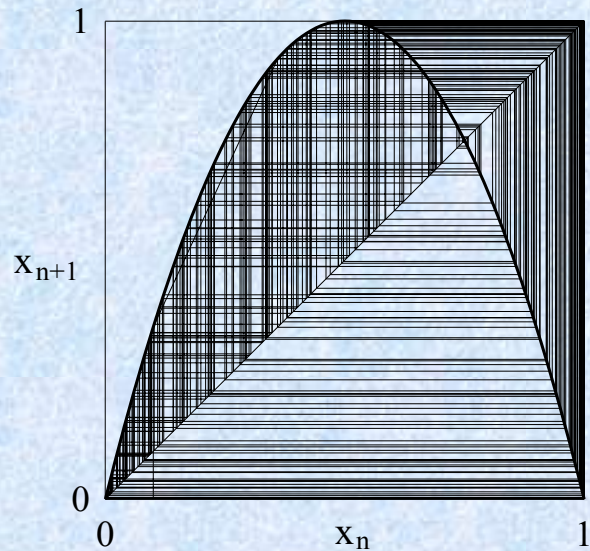
prozori
stabilnosti

Li T.-Y. and Yorke J.A. (1975) Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly* **82**, 985-992

Bifurkacije



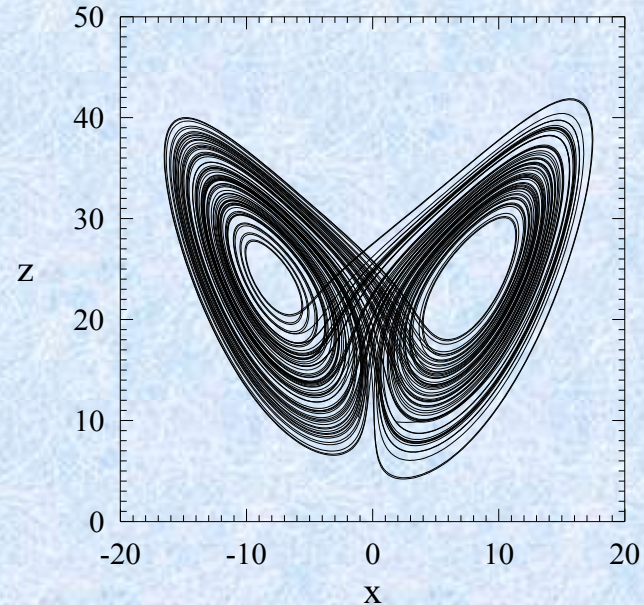
- Slučaj kada je $r=4$ je specijalan zato što nema ponore
- Postavlja se pitanje gde se orbite završavaju
- Postoje dve fiksne tačke $x^*=0$ i $x^*=0.75$ ali su obe nestabilne
- U ovom slučaju mapa pokazuje veoma zanimljivu dinamiku



Izgledao kao nasumično, ipak:

ubrzan porast na malim vrednostima x_n , zatim veliku vrednost x_n prate male vrednosti x_n , kao i porast oscilovanja oko nestabilne fiksne tačke $x^*=0.75$

Atraktor



- U slučaju višedimenzionih mapa ili sistema diferencijalnih jednačina, dakle kada postoji više promenljivih
- Analogon privlačnoj fiksnoj tački
- Atraktor** je skup tačaka u faznom prostoru koji za određene vrednosti parametara privlači sve trajektorije koje počinju u njegovoj neposrednoj blizini
- Zapremina u faznom prostoru koja obuhvata atraktor i koja sadrži sve tačke koje tokom iteracija završe na atraktoru se naziva **bazen atrakcije**

Ljapunovljevi eksponenti

- Haotično ponašanje proizvodi neku vrstu nasumičnosti, koja bi mogla da objasni kompleksno ponašanje realnih sistema
- Kvantifikacija haosa
- Velika osetljivost na početne uslove → divergencija bliskih trajektorija u faznom prostoru
- Mera - Ljapunovljev eksponent=srednji eksponencijalni rast udaljenosti između dva bliska početna uslova

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

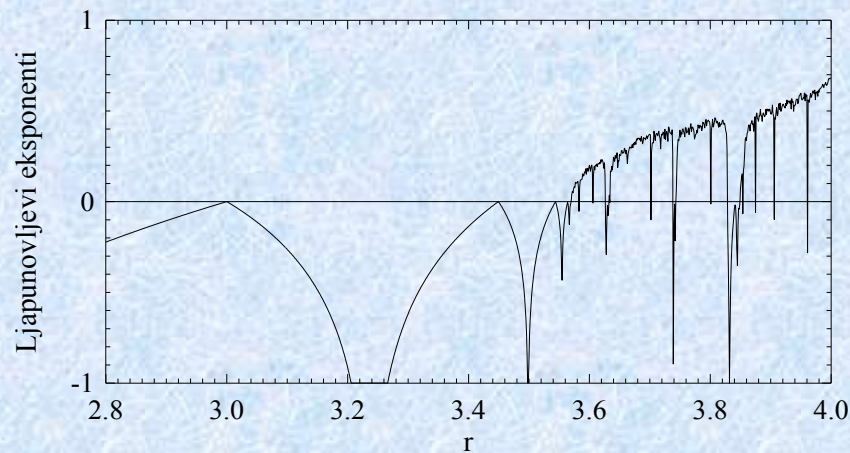
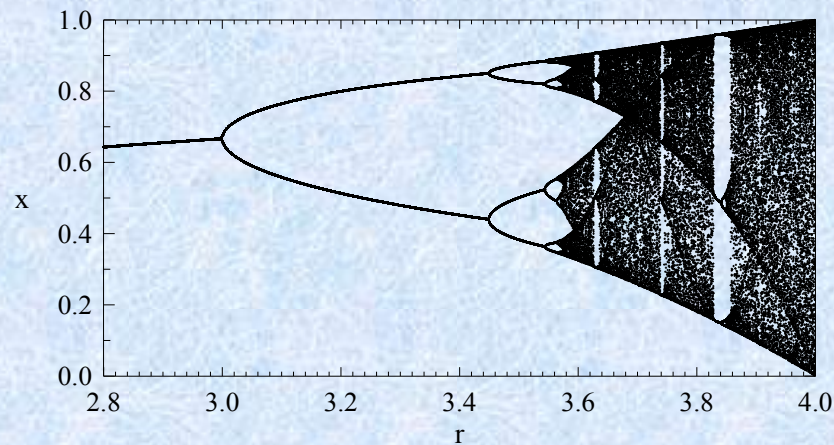
$\lambda < 0$ stabilno

$\lambda = 0$ periodično

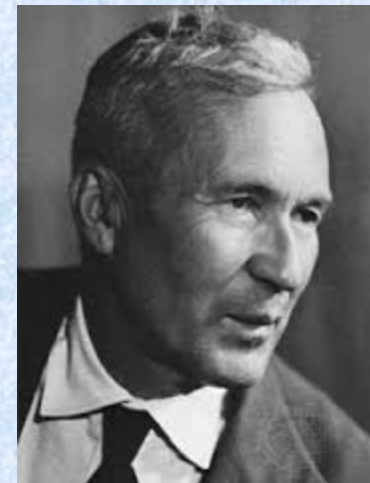
$\lambda > 0$ nestabilno



Ljapunovljevski eksponenti



Kolmogorovljeva kompleksnost

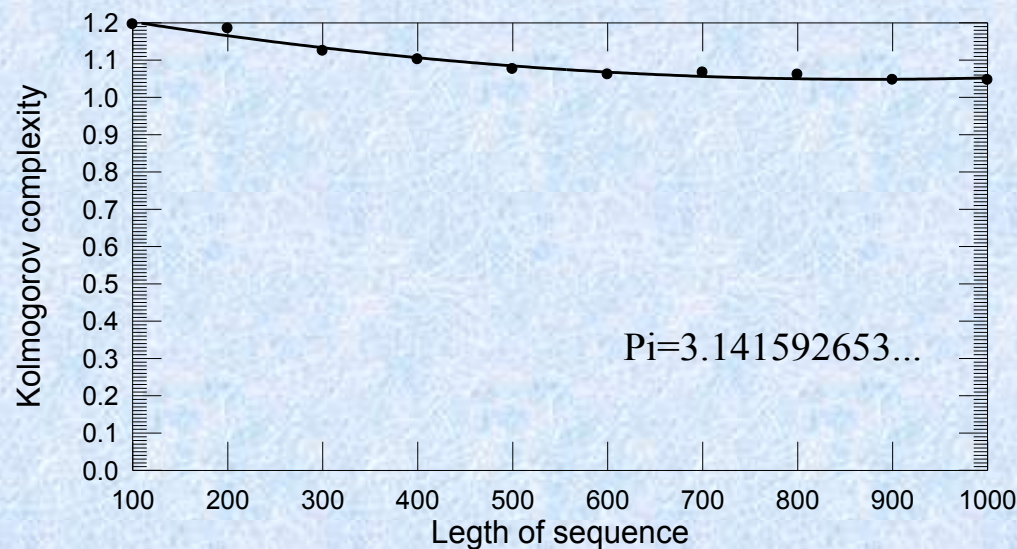


- Najkraći program koji štampa određeni niz i nakon toga stane
- abababababababab – ‘8 puta ab’
- xc2v3trrrg7m99o6 - mora se navesti svih 16 karaktera
- Nije izračunljivo
- Lempel - Ziv algoritam za računanje

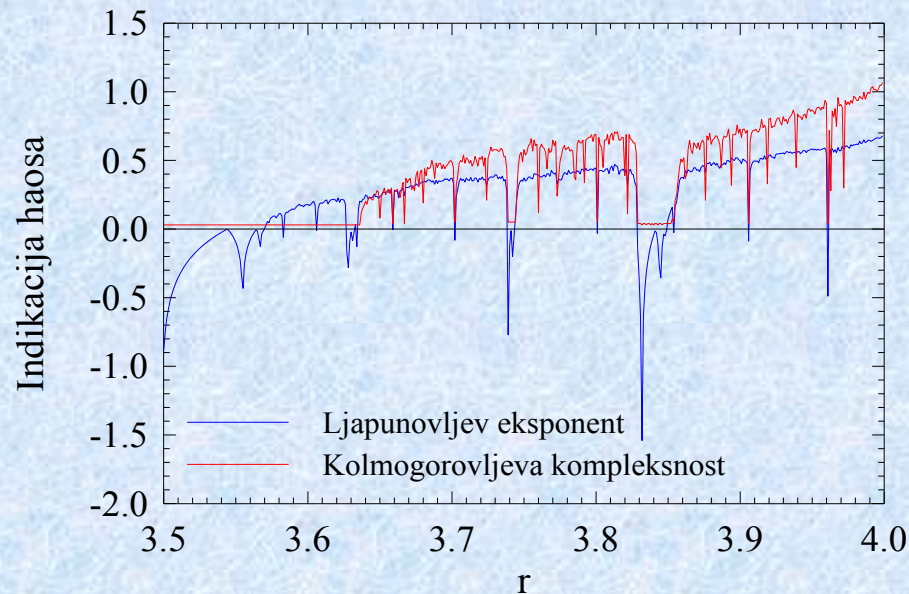
1)
$$s(i) = \begin{cases} 0 & x_i < x_i \\ 1 & x_i \geq x_i \end{cases}$$

2)
$$c(N) = O(b(N)), \quad b(N) = \frac{N}{\log_2 N}.$$

3)
$$C_k(N) = \frac{c(N)}{b(N)} = c(N) \frac{\log_2 N}{N}.$$



Kolmogorovljeva kompleksnost



- Indikator haotičnog ponašanja
- Analiza vremenskih serija (merenja)
- Temperatura vazduha, padavine, proticaj reka, koncentracija radona i td.



Jednačina energijskog bilansa

- Da bi sistem funkcionisao potrebno mu je snabdevanje energijom
- Dinamika razmene energije – jednačina energijskog bilansa

$$C_g \frac{\Delta T_g}{\Delta t} = R_{net} - H - \lambda E - G \quad \longrightarrow \quad C_g \frac{\Delta T_g}{\Delta t} = C_R(T_g - T_a) - C_H(T_g - T_a) - C_L d[b(T_g - T_a) + \frac{b^2}{2}(T_g - T_a)^2] - C_D(T_g - T_d)$$

$$\frac{\Delta T_d}{\Delta t} = \frac{1}{\tau}(T_g - T_d)$$

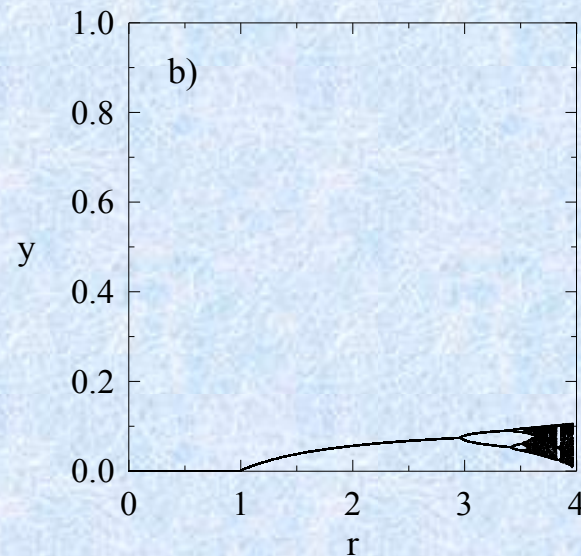
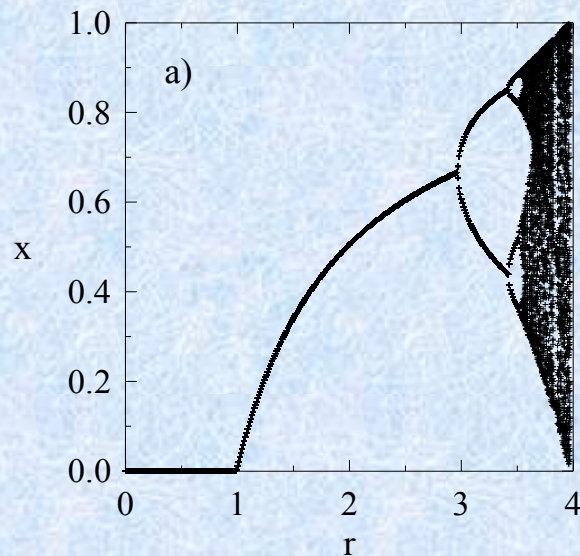
- Vremenska šema unapred + proširivanje jednačine sa T_a + deljenje sa neko T_0 (npr. 288 K, srednja globalna temperatura vazduha)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= Az_n - Bz_n^2 + Cy_n & \longrightarrow & x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \varepsilon y_n \\ y_{n+1} &= Dz_n + (1 - D)y_n & \longrightarrow & y_{n+1} = \varepsilon(x_n + y_n) \end{aligned}$$

- sistem sparenih
mapa

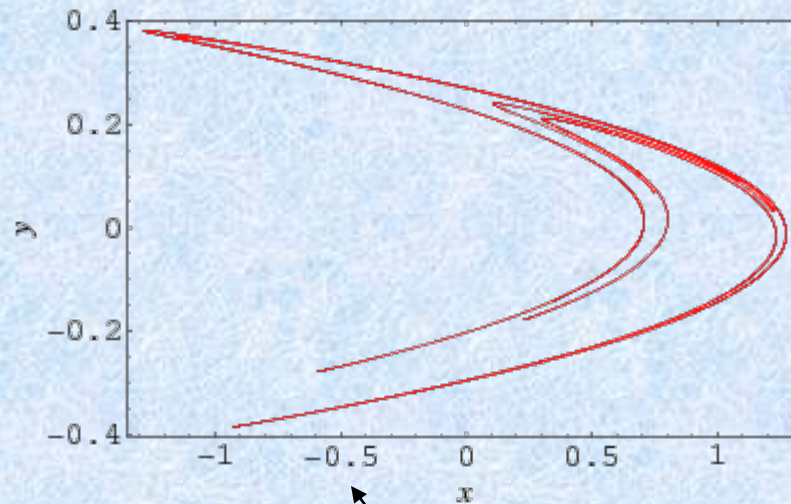
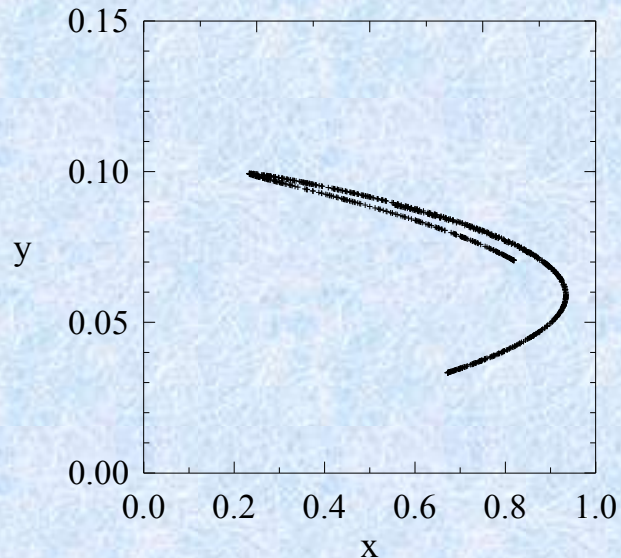
Analiza stabilnosti rešenja

- Bifurkacioni dijagrami sparenog sistema za r u intervalu $(0,4)$, $\varepsilon=0.1$ i početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$



Analiza stabilnosti rešenja

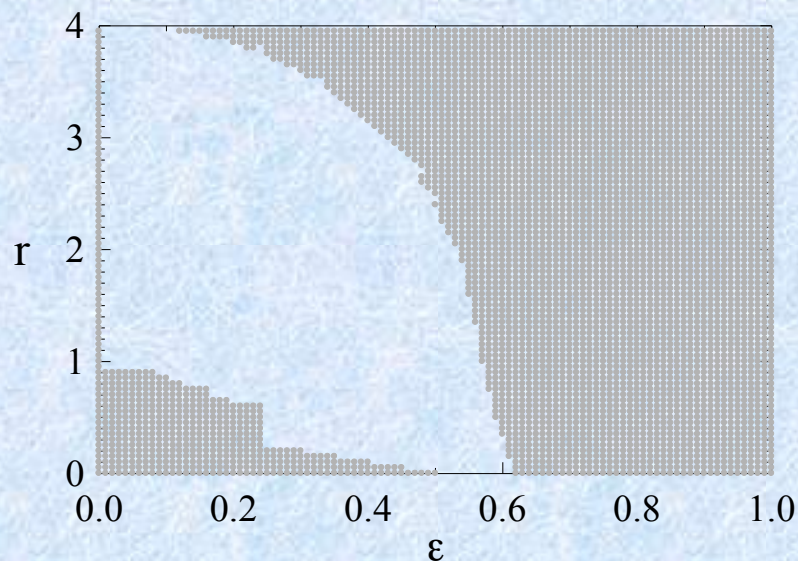
- Izgled atraktora u faznom prostoru sparenog sistema za vrednosti parametara $r=3.7$ i $\varepsilon=0.1$, pri početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$



Henonova
mapa

Analiza stabilnosti rešenja

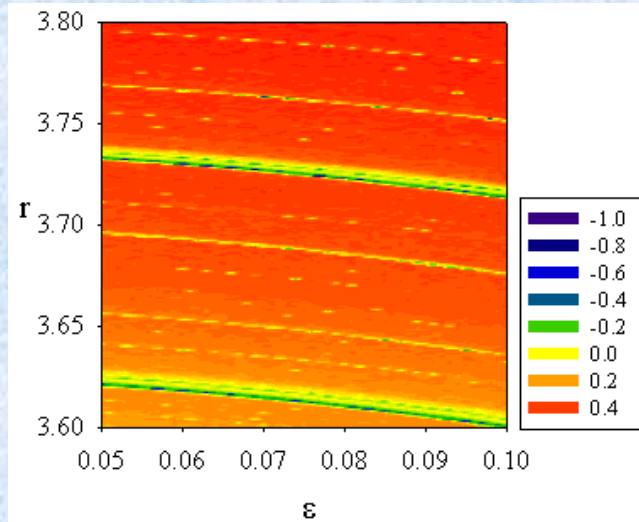
- Ispitivanje ponašanja sistema za različite vrednosti parametara r i ε



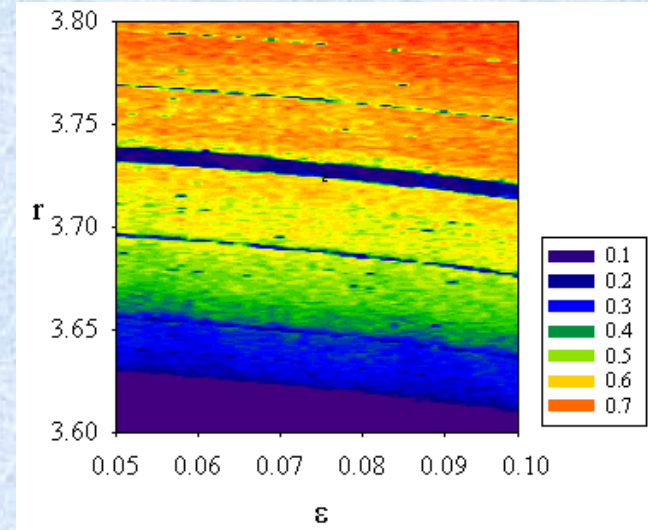
- Iz druge jednačine - parametar sparivanja ne sme da bude veći od 0.5 ($\varepsilon \leq 0.5$)
- Iz prve jednačine (gde se najveća vrednost člana koji sadrži x dobija kada za $x=0.5$ a najveća vrednost drugog člana za $y=1$) - novi uslov $r/4 + \varepsilon < 1$
- Detaljnije ispitivanje sistema za $r \in [3.6, 3.8]$
 $\varepsilon \in [0.05, 0.1]$

Analiza stabilnosti rešenja

Ljapunovljevi eksponenti



Kolmogorovljeva kompleksnost



- Pri određenim fizičkim uslovima - pojava haosa u sistemu, čime se unosi nesigurnost prilikom računanja temperature na površini zemljišta
- Temperatura na površini zemljišta, takozvana „skin“ temperatura, i za 10 °C veća od temperature vazduha na 2 m
- Mala promena u vrednostima parametara može da utiče na ponašanje sistema



Hvala na pažnji!

